

**Муниципальный этап XIII республиканской математической олимпиады
школьников имени академика РАО П.М. Эрдниева**

Решение 4 класс

1. Ответ: 2021. Решение: $(26+68)+(27+67)+\dots+(46+48)+47 = 94 \cdot 21 + 47 = 2021$

2. Ответ: 2 часа. Решение:

$240:3=80$ (км/ч) скорость первой машины

$240:6=40$ (км/ч) скорость второй машины

$40+80=120$ (км/ч) общая скорость

$240:120=2$ (ч) время встречи

(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется.**).

3. Ответ: 78 кг. Решение:

1) $46 + 30 = 76$ (кг) - карпов и сазанов;

2) $90 \cdot 2 = 180$ (кг) - рыбы было всего;

3) $180 - 76 = 104$ (кг) - судаков и лещей;

4) $1 + 3 = 4$ (части) - судаков и лещей;

5) $104:4 = 26$ (кг) - лещей;

6) $26 \cdot 3 = 78$ (кг) - судаков.

4. Ответ: 19. Решение:

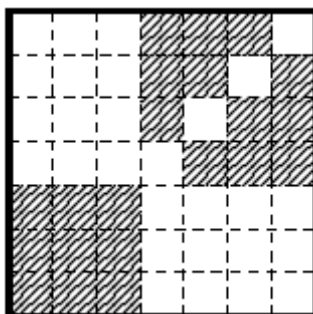
1) $28-22 = 6$ (см) – сторона маленького квадрата

2) $28-15 = 13$ (см)- сторона большого квадрата

3) $28-19 = 9$ (см) - сторона среднего квадрата

4) $28-9 = 19$ (см) -х

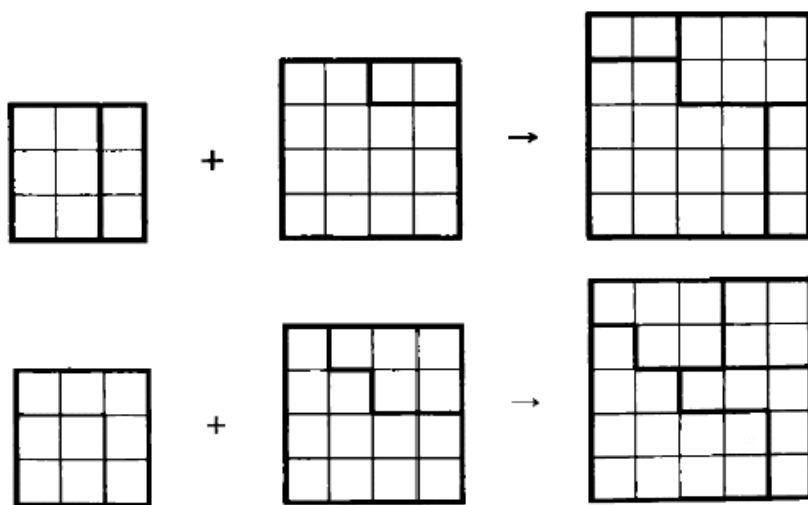
5. Ответ: например



**Муниципальный этап XIII республиканской математической олимпиады
школьников имени академика РАО П.М. Эрдниева**

Решение 5 класс

1. **Ответ: 2021.** Решение: $(20+66)+(21+65)+\dots+(42+44)+43 = 86 \cdot 23 + 43 = 2021$
2. **Ответ: 35 суток.** Решение: Пусть одновременно из Нижнего Новгорода вышли плоты и пароход. Относительно плотов пароход движется со своей собственной скоростью; раз он пять суток отплывал от плотов, то за пять суток к ним вернётся. Следовательно, за 10 суток плоты проплывают столько, сколько пароход за двое суток проходит против течения. Пароход против течения идёт 7 суток, поэтому плоты будут в пути 35 суток. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).
3. **Ответ: 50 рублей.** Решение: 10 кар. = 3 ручки, 1 ручка = 3 кар. + 5руб
3 ручки = 9 кар. + 15руб. Значит, 10 кар. = 9 кар. + 15руб., следовательно, 1 кар. = 15руб.* 3 + 5руб. = 50руб. – стоит 1 ручка.
4. **Ответ: 11.** Решение: Заместим что суммы периметров прямоугольников, стоящих в противоположных углах, равны. Тогда $12+x=10+13=23$ $x=11$.
5. **Ответ:** Возможны 2 различных решения.



**Муниципальный этап XIII республиканской математической олимпиады
школьников имени академика РАО П.М. Эрдниева**

Решение 6 класс

1. **Ответ: 66.** Решение: Пусть $x=20+n$, $20+(20+1)+\dots+(20+n)=2021$

$$20 \cdot (n+1) + 1 + 2 + \dots + n = 2021. \text{ Так как } 1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$$

$$\text{Получим уравнение } 20(n+1) + n(n+1)/2 = (n+1)(40+n)/2 = 2021$$

Разложим на множители правую часть $(n+1)(40+n) = 2 \cdot 2021 = 2 \cdot 43 \cdot 47 = 86 \cdot 47 = 94 \cdot 43$, отсюда следует, что $n+1=47$ и $n=46$. Таким образом, этих чисел 47. Подставим и найдем $x=20+46=66$, откуда получим $x=66$.

2. **Ответ: 14.** Решение:

Пусть x км/ч — скорость первого бегуна, тогда $x+6$ км/ч — скорость второго бегуна.

Из условия известно, что второй бегун пробежал круг за $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ часа, при этом через час после старта первому бегуну оставался 1 км до окончания первого круга, составим уравнение:

$$\frac{3}{4}(x+6) - 1 \cdot x = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow x = 14.$$

Таким образом, скорость первого бегуна равна 14 км/ч.

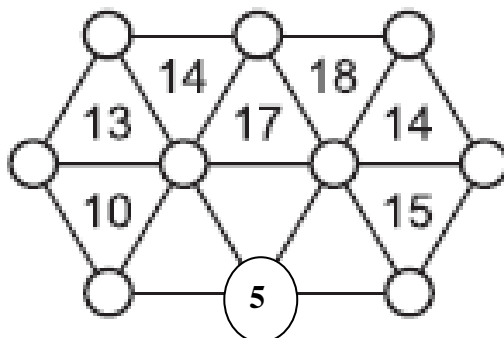
(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи -2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).

3. **Ответ: -4.** Пример: $32 = (-4) \cdot (-1) \cdot 8$.

Решение. Указанное разложение единственное. Это можно доказать. Если все три сомножителя положительны, то наибольший из них не меньше 4, а сумма больше 3, что противоречит условию. Значит, два из множителей отрицательны, а третий положителен. Число 32 имеет только один нечётный множитель, а сумма трёх множителей нечётна. Значит, один из них равен +1 или -1. Из предыдущего замечания следует, что это множитель -1. Далее несложно перебрать: $32 = (-1) \cdot (-2) \cdot 16 = (-1) \cdot (-4) \cdot 8 = (-1) \cdot (-16) \cdot 2 = (-1) \cdot (-8) \cdot 4$. Подходит только второй вариант.

4. **Ответ: 6.** Решение: Так как площади треугольников равны, то площадь каждого треугольника равна $81/6 = 13,5 \text{ см}^2$. Площадь треугольника АОВ равна 27. Тогда его высота, проведенная к стороне АВ равна 6. Это и есть расстояние от точки О до стороны АВ.

5. **Ответ: 5.** Решение: Заметим, что у всех треугольников есть две общие вершины. Значит, разность не соседних вершин равна разности периметров. Откуда перебором и получим 5.



**Муниципальный этап XIII республиканской математической олимпиады
школьников имени академика РАО П.М. Эрдниева**

Решение 7 класс

1. Ответ: 68. Решение: Пусть $x=26+n$, $26+(26+1)+\dots+(26+n)=2021$

$26 \cdot (n+1) + 1+2+\dots+n=2021$. Так как $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$

Получим уравнение $26(n+1)+n(n+1)/2=(n+1)(52+n)/2=2021$

Разложим на множители правую часть $(n+1)(52+n)=2 \cdot 2021=2 \cdot 43 \cdot 47=86 \cdot 47=94 \cdot 43$,
отсюда следует, что $n+1=43$ и $n=42$. Таким образом, этих чисел 43. Подставим и
найдем $x=26+42=68$, откуда получим $x=68$.

2. Ответ: 14. Решение:

Пусть x км/ч — скорость первого бегуна, тогда $x+6$ км/ч — скорость второго бегуна.

Из условия известно, что второй бегун пробежал круг за $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ часа, при этом
через час после старта первому бегуну оставался 1 км до окончания первого круга,

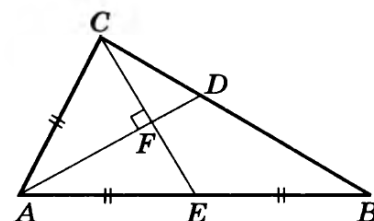
составим уравнение: $\frac{3}{4}(x+6) - 1 \cdot x = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow x = 14$.

Таким образом, скорость первого бегуна равна 14 км/ч. (При оценивании необходимо
учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи
4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2
балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).

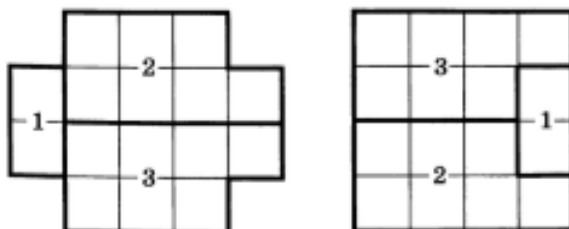
3. Ответ: 5 грибов. Решение. Любые трое мальчиков принесли вместе не менее 43
грибов, поэтому есть мальчик, собравший не менее 15 грибов (так как $14 \cdot 3 < 43$).
Значит, этот мальчик и остальные трое собрали не менее $15 + 43 = 58$ штук.

Если есть мальчик, собравший не менее 15 штук, то любая девочка собрала не менее
 $15 : 5 = 3$ грибов. Значит, девочки собрали разное число грибов, то есть вместе
не менее $3 + 4 + 5 = 12$ штук. Так как $58 + 12 = 70$ — все собранные грибы, значит
девочки собрали 3, 4 и 5 грибов, Ильяна принесла 5 штук.

4. Доказательство: Пусть в треугольнике ABC биссектриса AD и медиана CE
пересекаются в точке F. Тогда AF — биссектриса и
высота в треугольнике ACE, значит этот треугольник
равнобедренный, то есть $AC = AE$, а так как CE —
медиана, то $AB = 2AE$ и, следовательно, $AB = 2AC$.



5. Ответ: на рисунке. Возможны и другие решения.



**Муниципальный этап XIII республиканской математической олимпиады
школьников имени академика РАО П.М. Эрдниева**

Решение 8 класс

1. Ответ: $\frac{2021}{2020202020202020} < \frac{2020}{2019201920192019}$

Решение: Так как $\frac{2021}{2020202020202020} = \frac{2021}{2020 \cdot 1000100010001}$

$\frac{2020}{2019201920192019} = \frac{2020}{2019 \cdot 1000100010001}$, то достаточно сравнить дроби

$\frac{2021}{2020} \text{ и } \frac{2020}{2019}$, $\frac{2021}{2020} = 1 + \frac{1}{2020} \text{ и } \frac{2020}{2019} = 1 + \frac{1}{2019}$, а так как $\frac{1}{2020} < \frac{1}{2019}$ то

$\frac{2021}{2020202020202020} < \frac{2020}{2019201920192019}$

- 2. Ответ: 24 ч.** Решение. Обозначим расстояние между двумя пристанями как S км. В таком случае, скорость катера по течению реки составит: $V_{\text{по теч.}} = \frac{S}{4}$ км/ч, а его скорость в противоположном направлении: $V_{\text{прот. теч.}} = \frac{S}{6}$ км/ч. Разница скоростей: $\frac{S}{4} - \frac{S}{6} = \frac{S}{12}$ Тогда скорость течения реки равна $\frac{V_{\text{по теч.}} - V_{\text{прот. теч.}}}{2}$ и составит: $\frac{S}{12} : 2 = \frac{S}{24}$ км/ч. Поскольку скорость течения является скоростью плота, значит, на путь между А и В ему понадобится: $t_{\text{плота}} = s : \frac{S}{24} = 24$ ч. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).

- 3. Ответ: -4.** Пример: $36 = (-4) \cdot (-1) \cdot 9$. Решение. Указанное разложение единственное. Это можно доказать. Если все три сомножителя положительны, то наибольший из них не меньше 4 (так как $3^3 < 36$), а сумма больше 4, что противоречит условию. Значит, два из множителей отрицательны, а третий положителен. Тогда положительный сомножитель равен 9. Действительно, если он не больше 6, то сумма модулей двух других больше 2; если он не меньше 12, то сумма модулей двух других меньше 8. Тогда два отрицательных сомножителя равны либо -4 и -1, либо -2 и -2. Условию удовлетворяет только первый вариант.

- 4. Ответ: 12 девочек.** Решение. Пусть в классе x девочек и y мальчиков. Из условия задачи следует соотношение $\frac{2}{3}x + \frac{1}{7}y = \frac{1}{3}(x + y)$ которое после его преобразования принимает вид $7x = 4y$. Из условия и полученного соотношения следует, что число x делится на 3 и на 4, поэтому делится на 12. Пусть $x = 12n$, где n — натуральное число. Из полученного равенства следует, что $y = 21n$. Значит, в классе $x + y = 12n + 21n = 33n$ учеников. По условию это число не больше 40, значит, $n = 1$. В классе $x = 12n = 12$ девочек.

- 5. Ответ: 5 см.** Решение. Пусть $AO = x$ $BC = y$, CH -высота $CH = \frac{s}{l} = \frac{32}{8} = 4$

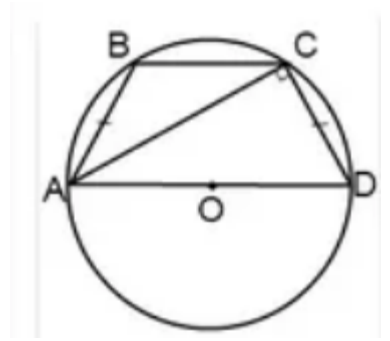
По свойству средней линии $\frac{AD + BC}{2} = x + \frac{y}{2} = 8$

$$DH = \frac{AD - BC}{2} = x - \frac{y}{2} \quad AH = AD - DH = 2x -$$

$$\left(x - \frac{y}{2}\right) = x + \frac{y}{2} = 8$$

$$\triangle ACD, \angle C = 90^\circ \quad CH^2 = AD \cdot DH$$

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)8 = 16 \quad x - \frac{y}{2} = 2 \quad \text{и} \quad x + \frac{y}{2} = 8 \quad \text{получаем } x = 5$$



**Муниципальный этап XIII республиканской математической олимпиады
школьников имени академика РАО П.М. Эрдниева**

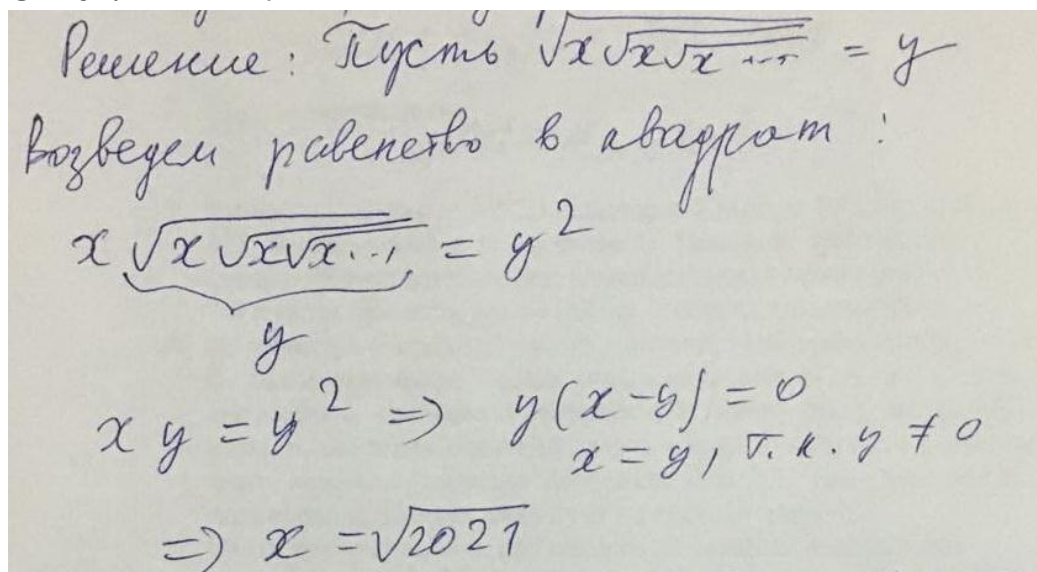
Решение 9 класс

1. **Ответ:** $\sqrt{2021} + \sqrt{2019} < 2\sqrt{2020}$. Введем обозначение: $x = 2020$ Имеем: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ и $2\sqrt{x}$. Возведем оба выражения в квадрат: $2x + 2\sqrt{(x+1)(x-1)}$ и $4x$, далее, вычтем из обоих выражений $2x$ и разделим на 2, тогда, сравнив получившиеся выражения, получим: $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2}$, откуда следует, что $\sqrt{2021} + \sqrt{2019} < 2\sqrt{2020}$.

2. **Ответ: 6 км/ч.** Решение: Частота встреч обратно пропорциональна скорости отца относительно сына. Поэтому условие означает, что сумма S скоростей отца и сына в 5 раз больше разности R этих скоростей. Разделив удвоенную скорость отца $S + R$ на удвоенную скорость сына $S - R$ получим отношение их скоростей: $\frac{S+R}{S-R} = 1,5$. Значит скорость отца 6 км/ч.

(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).

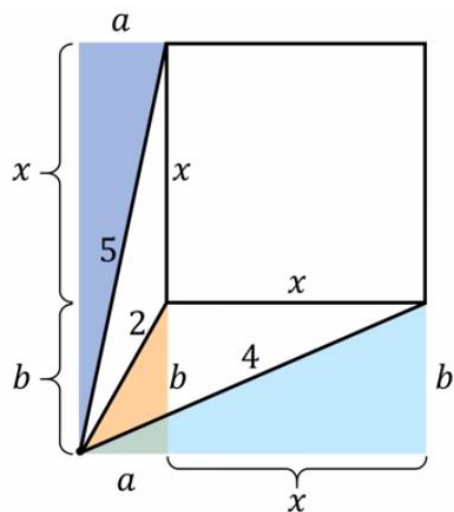
3. **Ответ:** $\sqrt{2021}$.



Решение: Пусть $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = y$
Возведем равенство в квадрат:
 $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = y^2$
 $x y = y^2 \Rightarrow y(x-y) = 0$
 $x = y$, т.к. $y \neq 0$
 $\Rightarrow x = \sqrt{2021}$

4. **Ответ: 76 или 124.** Решение. Пусть значение первой функции при увеличении аргумента на $8 - 2 = 6$ изменилось на d , тогда второй — на $d \pm 8$. От 2 до 20 аргумент возрастает на 18, что больше 6 в 3 раза. Значит, значение первой функции изменилось на $3d$, второй — на $3(d \pm 8) = 3d \pm 24$, они отличаются на $3d - 3d \pm 24 = \pm 24$. Значит, искомое значение второй функции равно 100 ± 24 , то есть 76 или 124.

5. **Ответ:** $\frac{41 - \sqrt{511}}{2}$. Решение. Пусть сторона квадрата равна x . Построим до прямоугольных треугольников.



$$a^2 + b^2 = 2^2 = 4$$

$$(a + x)^2 + b^2 = 4^2 = 16$$

$$a^2 + (b + x)^2 = 5^2 = 25$$

Составим систему уравнений и решим её

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ (a + x)^2 + b^2 = 16 \\ a^2 + (b + x)^2 = 25 \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{41 - \sqrt{511}}{2}$$

**Муниципальный этап XIII республиканской математической олимпиады
школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева**

Решение 10 класс

- 1. Ответ:** например $2021 = 1^2 + 16^2 + 42^2$. Можно найти 6 различных решений.

Решение: $2020 = 4x^2 + 4y^2 \quad 5 \cdot 101 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

$$\begin{cases} c = 2 \\ d = 1 \end{cases} \begin{cases} a = 10 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} c = 1 \\ d = 2 \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = 10 \end{cases}$$

$$505 = (x)^2 + (y)^2 = (2a + b)^2 + (a - 2b)^2 = (a + 2b)^2 + (2a - b)^2$$

$$505 = (x)^2 + (y)^2 = (21)^2 + (8)^2 = (12)^2 + (19)^2$$

$$2020 = (2x)^2 + (2y)^2 = (42)^2 + (16)^2 = (24)^2 + (38)^2$$

$$2021 = 1^2 + 16^2 + 42^2 = 1^2 + 24^2 + 38^2$$

- 2. Ответ: 9 м/с и 8 м/с.** **Решение.** Пусть скорости велосипедистов равны x м/с и y м/с ($x > y$). Тогда $10(x + y) = 170$ и $170(x - y) = 170$. Отсюда находим: $x = 9$ м/с и $y = 8$ м/с. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи -2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).

- 3. Ответ: 0,5.** **Решение.** Представим дробь в виде сумму двух дробей

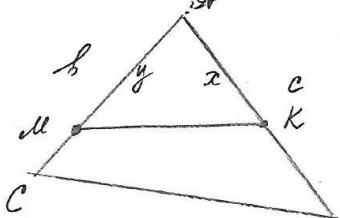
$$\frac{1}{n\sqrt{n-1} + (n-1)\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n-1} + (n-1)\sqrt{n}} \cdot \frac{n\sqrt{n-1} - (n-1)\sqrt{n}}{n\sqrt{n-1} - (n-1)\sqrt{n}} = \frac{n\sqrt{n-1} - (n-1)\sqrt{n}}{n(n-1)}$$

$$\frac{1}{n\sqrt{n-1} + (n-1)\sqrt{n}} = \frac{n\sqrt{n-1} - (n-1)\sqrt{n}}{n(n-1)} = \frac{\sqrt{n-1}}{n-1} - \frac{\sqrt{n}}{n}$$

$$\frac{1}{5\sqrt{4} + 4\sqrt{5}} + \dots = \frac{\sqrt{4}}{4} - \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{6}}{6} + \dots - \frac{\sqrt{2020}}{2020} + \frac{\sqrt{2021}}{2021} = 0,5$$

- 4. Доказательство:**

Анализ условия



$$AC = b, AB = c, AM = y, AK = x, MK = l$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A \Rightarrow xy = \frac{1}{2} bc$$

$$S_{\triangle AMK} = \frac{1}{2} xy \sin A \quad (\text{см сравнение } S)$$

По т. косинусов к $\triangle AMK$:

$$l^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A$$

Заметим истинность нерав-ва $x^2 + y^2 \geq 2xy$
тогда $l^2 \geq 2xy(1 - \cos A) = 2 \cdot \frac{1}{2} bc \cdot 2 \sin^2 \frac{A}{2}$

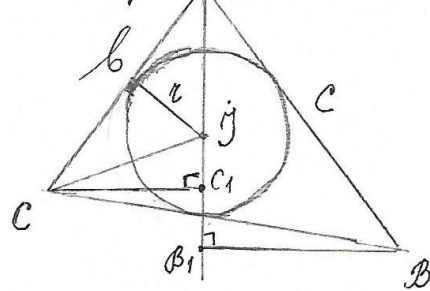
$$= 2bc \sin^2 \frac{A}{2}$$

Поэтому докажем, что $l^2 > r^2$, где $r = \frac{bc \sin^2 \frac{A}{2}}{2}$

На сторонах BC и CF прямоугольника ABCD взять точки E и F так, чтобы $\triangle AEF$ был правильным. Найти площадь $\triangle CEF$.

Решение

Чертим с окр



J - центр вписанной окр-ты
C₁ и B₁ - основания \perp на AJ.

$$\text{Рассм. } \angle CJB_1 = \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle C < \frac{\pi}{2}$$

(внешний \angle $\triangle AJC$)

Значит, точка C₁ лежит дальше чем J $\Rightarrow \pi < \angle CC_1J$

$$\text{а } CC_1 = b \cdot \sin \frac{A}{2} \quad \text{Аналогично}$$

$$\text{а } BB_1 = c \cdot \sin \frac{A}{2} \quad \text{Перемнож}$$

$$\text{а } BB_1 = c \cdot \sin \frac{A}{2} \quad \text{Перемнож}$$

$$\text{а } BB_1 = c \cdot \sin \frac{A}{2} \quad \text{Перемнож}$$

5. Ответ: $S_1 + S_2$

На сторонах BC и CF прямоугольника ABCD взять точки E и F так, чтобы $\triangle AEF$ был правильным. Найти площадь $\triangle CEF$.

$$\text{см } S_{\triangle ABE} = S_1, \text{ а } S_{\triangle ADF} = S_2$$

$$\text{Найдём } S:$$

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AE \cdot \sin \angle BAE = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \cos 2\alpha \cdot a \cdot \sin 2\alpha =$$

$$\frac{1}{4} a^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{8} a^2 \sin 4\alpha$$

$$S_2 = \frac{1}{2} AF \cdot AD \cdot \sin \angle FAD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \cos(30^\circ - \alpha) \cdot a \cdot \sin(30^\circ - \alpha) =$$

$$\frac{1}{4} a^2 \sin(60^\circ - 2\alpha)$$

$$S_{\triangle ECF} = \frac{1}{2} FE \cdot FC \cdot \sin \angle EFC = \frac{1}{2} a \cdot a \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha) =$$

$$\frac{1}{4} a^2 \sin(120^\circ - 2\alpha)$$

$$\text{Докажем, что } S_{\triangle ECF} = S_1 + S_2, \text{ т.е.}$$

$$\sin 2\alpha + \sin(60^\circ - 2\alpha) = \sin(120^\circ - 2\alpha)$$

$$\frac{2 \sin \frac{2\alpha + 60^\circ - 2\alpha}{2} \cdot \cos \frac{2\alpha - 60^\circ + 2\alpha}{2}}{2} = \frac{2 \sin 30^\circ \cdot \cos(2\alpha - 30^\circ)}{2}$$

$$\sin(120^\circ - 2\alpha) = \sin(180^\circ - 60^\circ - 2\alpha) = \sin(180^\circ - (60^\circ + 2\alpha)) = \sin(60^\circ + 2\alpha)$$

$$= \sin(90^\circ - 30^\circ + 2\alpha) = \sin(90^\circ - (30^\circ - 2\alpha)) = \cos(30^\circ - 2\alpha) = \cos(2\alpha - 30^\circ)$$

$$\text{Ответ: } S_1 + S_2$$

Решение 11 класс

1. **Ответ:** например, $2021^2 = 2019^2 + 32^2 + 84^2$. Возможны и другие варианты.
Решение: рассмотрим $2021 = a^2 + b^2 + c^2$. Можно считать, что $(a = 42, b = 16, c = 1)$
 $a \geq b \geq c$, тогда $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Имеем: $2021 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 = (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2) + 4b^2c^2 + 4a^2c^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2bc)^2 + (2ac)^2$.

Итак, $x = a^2 + b^2 - c^2 = 2019$, $y = 2bc = 32$, $z = 2ac = 84$

$$2021^2 = 2019^2 + 32^2 + 84^2$$

Если взять $a = 38, b = 24, c = 1$, то получим еще одно решение

$$2021^2 = 2019^2 + 48^2 + 76^2.$$

2. **Ответ: 25 км/ч.** **Решение:** Пусть скорость третьего велосипедиста равна v км/ч, а t ч — момент времени, когда он догнал второго велосипедиста. Начало отсчёта времени — момент, когда первый велосипедист начал движение. Тогда к моменту времени t , когда третий велосипедист догонит второго, второй велосипедист проедет расстояние $15(t - 1)$ км, а третий — расстояние $v(t - 2)$ км. Аналогично: к моменту времени $t + 9$, когда третий велосипедист догонит первого, первый велосипедист проедет $21(t + 9)$ км, а третий, поскольку он был в пути на два часа меньше, проедет $v(t + 7)$ км. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 15(t - 1) = v(t - 2), \\ 21(t + 9) = v(t + 7). \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $t + 7$, а второе — на $t - 2$ и вычтем первое уравнение из второго:

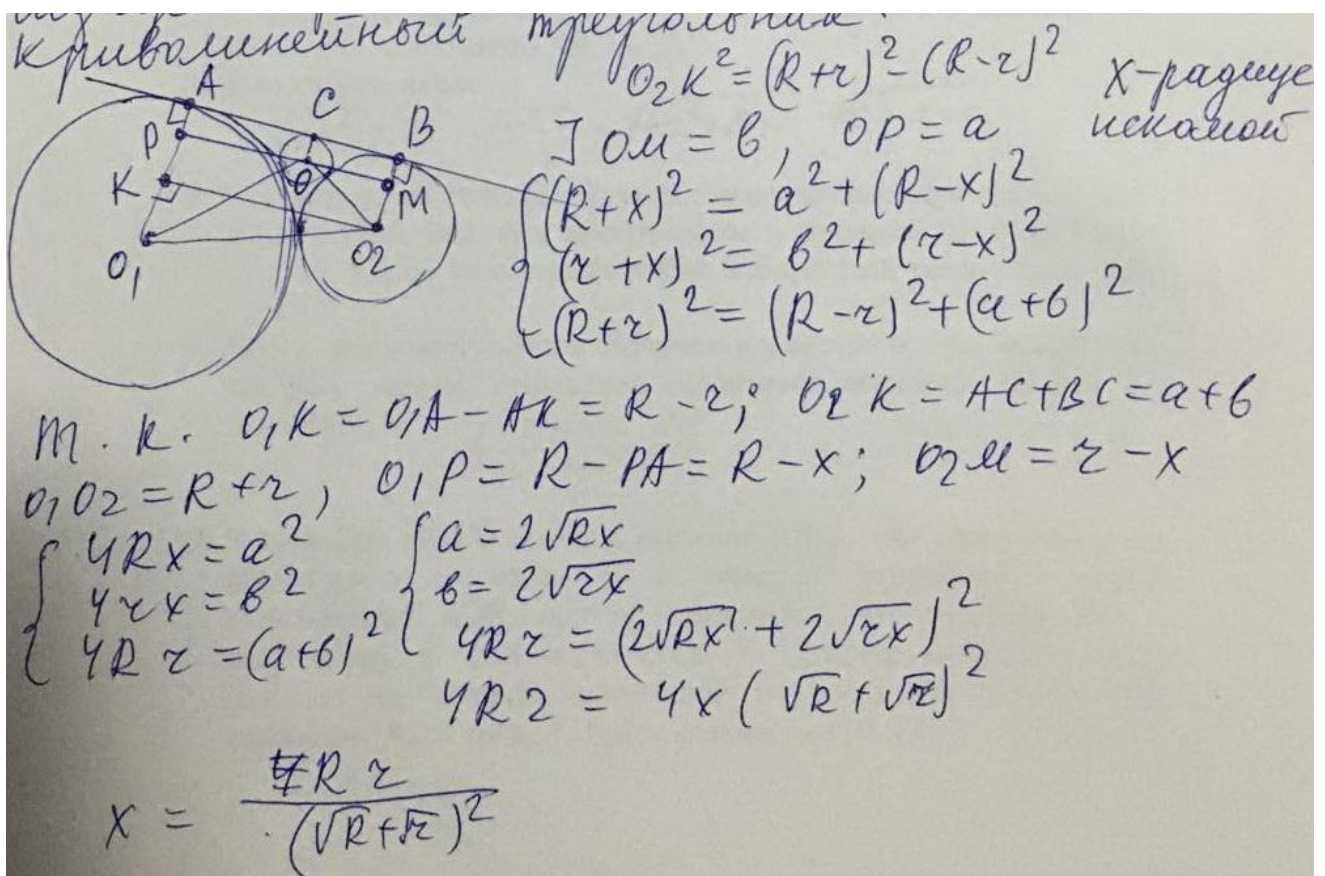
$$21(t^2 + 7t - 18) - 15(t^2 + 6t - 7) = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 19t - 91 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -13, \\ t = 3,5. \end{cases}$$

По условию задачи подходит только положительный корень, то есть $t = 3,5$. Подставляя t во второе уравнение, найдём искомую скорость:

$$21 \cdot 12,5 = v \cdot 10,5 \Leftrightarrow v = 25.$$

(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи -2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).

3. **Ответ:** $\frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}$



4. Ответ: 15,5. Решение.

$$\frac{1}{3}(14S + 11S + 29S + 8S) = V = \frac{1}{3}SH_1$$

$$62S = SH_1 \quad H_1 = 62$$

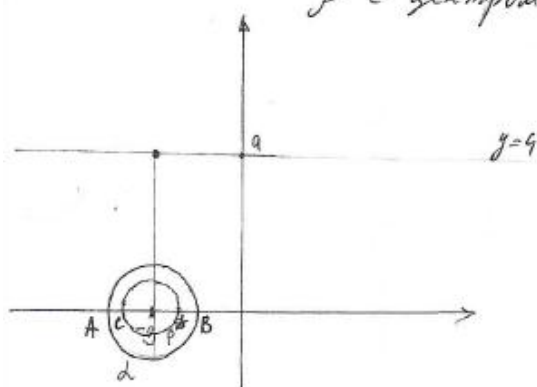
$$\frac{1}{3}(rS + rS + rS + rS) = V = \frac{1}{3}SH_1$$

$$4r = H_1$$

$$r = \frac{62}{4} = \frac{31}{2} = 15,5$$

5. Ответ: $a = \frac{1}{6}$, $a = 2,5$

Решение
 Имеем окр-ти: L с центром $(2a-3; a)$ и $R=1,5$
 β с центром $(-3; a)$ и $r = a+1$

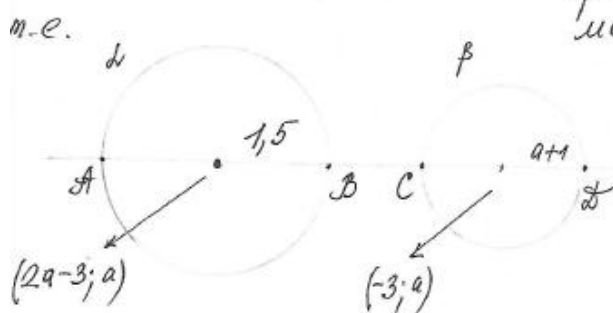


$\text{] } a=0 \text{ } L: \text{ центр } (-3; 0), R=1,5$

$\beta \text{ " " } (-3; 0) R=1$

См. наг. положение

При увеличении $a > 0$
 окр-ть L перемещается вправо
 с постоянным радиусом;
 окр-ть β лишь увеличивает радиус
 центры лежат на одной
 прямой. И ось Ox и uz . x .
 может быть лишь в двух сл.



1) $A=C$ (совпадают)

$$2a-4,5 = -3-a-1$$

$$3a = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{6}$$

2) $A=D$ (совпадают)

$$2a-4,5 = a-2$$

$$a = 2,5$$

Ответ $a = \frac{1}{6}; a = 2,5$