

Решение 4 класс

- 1. Ответ: 402,...,406.** Решение: Пусть первое число равно x , тогда остальные числа $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$. Их сумма равна $5x+10=2020$. Решим уравнение подбором и получим $x=402$. Найдем остальные 4 числа 403, 404, 405, 406.
- 2. Ответ: 2 часа. Решение:** Пусть заказ состоит 6 деталей. Тогда первый мастер за 1 час делает 1 деталь, второй 2 детали. Вместе за 1 час они сделают 3 детали. Тогда работая вместе $6:3=2$ часа.
(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
- 3. Ответ: 160 рублей.** Решение: Если принять цену собаки за одну часть, то цена коровы – 4 части, а лошади – 8 частей. $1 + 4 \cdot 2 + 8 = 17$ (частей) составляет вся покупка
 1) $340 : 17 = 20$ (руб.) цена собаки
 2) $20 \cdot 4 = 80$ (руб.) цена коровы
 3) $80 \cdot 2 = 160$ (руб.) цена лошади
- 4. Ответ:** на рисунке.

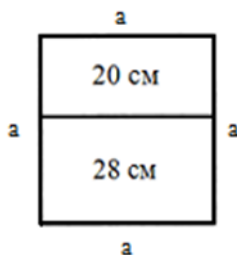
			2
3	1	4	6
		5	

- 5. Решение.** На рисунке. Могут быть и другие варианты.

8	2	3	5
1	7	6	4

Решение 5 класс

1. **Ответ: 249,...,256.** Решение: Пусть первое число равно x , тогда остальные числа $x+1$, $x+2, x+3, x+4$, $x+5, x+6, x+7$. Их сумма равна $8x+28=2020$. Решим уравнение и получим $x=249$. Найдём остальные 7 чисел 250,...,256.
2. **Ответ: за 6 дней.** Решение: Пусть заказ состоит из 6 деталей. Тогда мастер за 1 день делает 2 детали, а вместе они делают 3 детали. Тогда ученик за 1 день выполнит 1 деталь. Значит $6:1=6$ дней. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: 8 орехов.** Решение. Обозначим количество орехов в ящиках a , b , c соответственно. Тогда условие задачи можно записать так: $a + b = b + c$
 $b + 10 = a + c$. Сложив эти равенства, получим: $a + b + 16 = a + b + c + c$.
 Убираем одинаковые буквы-ящики: $16 = c + c$.
 А значит, одно c равно 8, т.е. в третьем ящике 8 орехов.
4. **Ответ: 32 см.** Решение: $P_1+P_2 = 20+28=48$ $P_1+P_2 = 6a$ $6a=48$, $a=8$ $P_{\text{КВ}}=4a=4*8=32$



5. **Решение.** На рисунке. Могут быть и другие варианты.

12	2	10	4	5	6
1	11	3	9	8	7

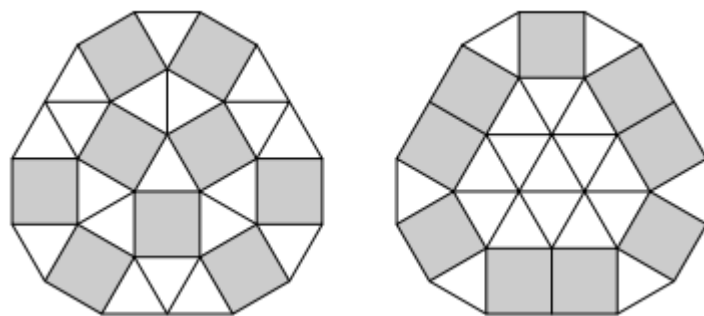
Решение 6 класс

1. **Ответ:** например, $999 + 999 + 9:9+9:9+(99:9 + 9) = 2020$
2. **Ответ: 60 минут.** Решение. Пусть заказ состоит из 36 деталей. Тогда первый мастер за 1 час делает 6 деталей, второй 12 деталей, третий-18 деталей. Вместе за 1 час они сделают 36 деталей. Тогда работая вместе $36:36=1$ час. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: лимон дороже банана.** Обозначим стоимости одного фрукта: лимона Л, банана Б, апельсина А, вишни В. Далее можно рассуждать по-разному. Из условия задачи получим два равенства, которые должны выполняться одновременно:
 $L + B = 2A + 23B;$
 $3L = 2B + 2A + 14B.$
Умножим обе части второго равенства на 2: $6L = 4B + 4A + 28B$
Используя первое равенство, получим: $4A + 28B > 2A + 23B = L + B.$
Следовательно, $6L > 4B + L + B$, откуда $L > B$.
4. **Ответ:1,2,4.** Пусть a, b и c — три цифры, задуманные Батыром. Существует девять двузначных чисел, в десятичной записи которых используются только эти цифры: $aa, bb, cc, ab, ba, ac, ca, bc, cb$. Найдем их сумму, разложив каждое из чисел в виде суммы разрядных слагаемых: $(10a + a) + (10b + b) + (10c + c) + (10a + b) + (10b + a) + (10a + c) + (10c + a) + (10b + c) + (10c + b) = 33a + 33b + 33c = 33(a + b + c)$. По условию, $33(a + b + c) = 231$, то есть, $a + b + c = 7$. Существует единственная тройка различных и отличных от нуля цифр, сумма которых равна 7. Это 1,2,4.
5. **Решение.** На рисунке. Могут быть и другие варианты.

1	13	10	4	12
8	2	11	14	5
15	9	3	6	7

Решение 7 класс

- 1. Ответ: 31,32,...70.** Решение. Пусть x -первое натуральное число последовательности $x+(x+1)+\dots+(x+39)=2020$. Получим уравнение и разложим на множители правую часть $(39+1)(2x+39)=40\cdot 101$. Решим уравнение $2x+39=101$, откуда получим $x=31$. Найдем остальные 39 чисел 32...,70.
- 2. Ответ: 4 часа.** Решение. Пусть во время, когда один из рабочих роет основную яму, двое остальных роют дополнительные ямы. Тогда к концу работы над основной ямой будут вырыты еще $3\cdot 0,5 = 1,5$ дополнительных ям. Таким образом, когда все работают одновременно, они за тоже время выроют 2,5 ямы. Значит вместе они выроют яму быстрее в 2,5 раза, то есть за $10 : 2,5 = 4$ часа. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
- 3. Ответ: 301. Решение.** Пусть n – число книг на столе. По условию, $n-1$ делится на 4, на 5 и на 6, а значит, и на их НОК – 60, т.е. $n-1=60m$, где m –целое число. Таким образом, нужно найти число n вида $60m+1$, которое делилось бы на 7. Из чисел $m=0,1,2,3,4,5,6$, как нетрудно проверить, подходит только $m=5$, так что наименьшее число книг, которое могло быть на столе, 301. Посмотрим, какие еще значения m годятся. Пусть $60m+1$ делится на 7; тогда и $60m+1-301$ делится на 7, т.е. $60(m-5)$ делится на 7 и, значит, $m-5$ делится на 7. Отсюда $m=7k+5$, где k – целое число. Значит, $n=60m+1=60(7k+5)+1=420k+301$. Итак, на столе могло быть $420k+301$ книга, где k – любое целое неотрицательное число.
- 4. Ответ: Да, смог.** Многоугольники на рисунке (см. рис.). Угол при вершине квадрата – половина развёрнутого, а при вершине правильного треугольника – треть развёрнутого. Поэтому во внутренней вершине могут сходиться либо 6 треугольников, либо 3 треугольника и 2 квадрата, либо 4 квадрата (это помогает проверить, возможна ли в действительности нарисованная неточно от руки картинка).



- 5. Решение.** На рисунке. Могут быть и другие варианты.

-4	-5	5	4
3	6	-3	-6
1	-1	-2	2

Решение 8 класс

1. **Ответ: 1932.** Решение. Пусть $a:b=c$, тогда $a+b+c=2020$. Получим уравнение и разложим на множители правую часть $bc + b + c = 2020$ $b(c+1) + c + 1 = 2021$
 $(c+1)(b+1) = 2021 = 43 \cdot 47 = 47 \cdot 43$, откуда следует, что $c=42$ $b=46$ или $c=46$ $b=42$. Тогда $a=1932$. Проверка $1932+42+46=2020$.
2. **Ответ: 8,4 минуты.** Решение: Наименьшее общее кратное чисел 9, 14 и 18 равно 126. За 126 минут первый и второй, второй и третий, первый и третий насосы (каждый учтен дважды) заполняют $14 + 9 + 7 = 30$ бассейнов. Следовательно, работая одновременно, первый, второй и третий насосы заполняют 15 бассейнов за 126 минут, а значит, 1 бассейн за 8,4 минуты. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: 3.** Решение.

Решение

Запишем систему:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y^2 \\ y^3 - 3y^2 = z^3 - 3z^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - y^3 = 3x^2 - 3y^2 \\ y^3 - z^3 = 3y^2 - 3z^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2) = 3(x-y)(x+y) \\ (y-z)(y^2+yz+z^2) = 3(y-z)(y+z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-y) \cdot (x^2+xy+y^2 - 3(x+y)) = 0 \\ (y-z) \cdot (y^2+yz+z^2 - 3(y+z)) = 0 \end{cases}$$

м.к $x \neq y$, то вычтем из 2-1

$$\begin{aligned} & y^2 + yz + z^2 = 3(y+z) \\ & x^2 + xy + y^2 = 3(x+y) \\ \hline & (z^2 - x^2) + (yz - xy) = 3(y+z - x - y) \\ & (z-x) \cdot (z+x) + y(z-x) = 3(z-x) \\ & (z-x) \cdot (z+x+y) = 3(z-x) \\ & \text{м.к } z \neq x, \text{ то } \underline{\underline{x+y+z=3}} \end{aligned}$$

4. **Ответ. 43,5.** Решение.

Решение.

Дан набор a_1, a_2, \dots, a_9 . Составим соседние пары и найдем средние арифм.

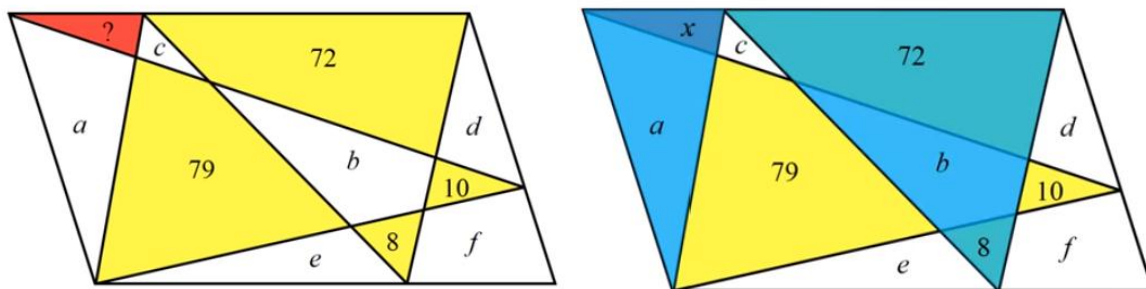
$$\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_2+a_3}{2} + \dots + \frac{a_7+a_8}{2} + \frac{a_8+a_9}{2} =$$

$$= \frac{a_1}{2} + a_2 + a_3 + \dots + a_8 + \frac{a_9}{2}.$$

Чтобы сумма была наибольшей надо a_1 и a_9 взять самые маленькие, т.е.

$$\frac{1}{2} + 3 + 4 + \dots + 9 + \frac{2}{2} = 43,5.$$

5. **Ответ:9.** Решение. Обозначим неизвестные площади частей параллелограмма за x, a, b, c, d, e, f . Нам необходимо найти x .



Рассмотрим пару треугольников, сумма оснований которых равна стороне AB и сумма площадей которых равна $x+a+72+b+8$ равна половине площади параллелограмма. Тогда сумма площадей частей треугольника с основанием AD $a+79+b+10$ равна половине площади параллелограмма. Получим уравнение $x+a+72+b+8=a+79+b+10$. Решив уравнение, получим $x=9$.

Решение 9 класс

1. **Ответ: 0, 1932, 2112, 4044.** Решение. Пусть $a:b=c$, тогда $a+b+c=2020$.

Получим уравнение и разложим на множители правую часть $bc + b + c = 2020$ $b(c + 1) + c + 1 = 2021$ $(c + 1)(b + 1) = 2021$,
 $(c + 1)(b + 1) = 2021 = 43 \cdot 47 = -47 \cdot -43 = -1 \cdot -2021 = 1 \cdot 2021 = 2021 \cdot 1 = -2021 \cdot -1$
 отсюда следует, что $c=42$, $b=46$ или $c = -2$, $b = -2022$ или $c = -48$, $b = -44$. Тогда $a=0$, 1932, 4044, 2112.

2. **Ответ: 10.** Решение: Обозначим n — число деталей, которые изготавливает за час второй рабочий. Тогда первый рабочий за час изготавливает $n + 1$ деталь. На изготовление 110 деталей первый рабочий тратит на 1 час меньше, чем второй рабочий, отсюда имеем:

$$\frac{110}{n+1} + 1 = \frac{110}{n} \Leftrightarrow \frac{110 + n + 1}{n+1} = \frac{110}{n} \Leftrightarrow 110n + 110 = n^2 + 111n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10; \\ n = -11 \end{cases} \Leftrightarrow n = 10.$$

Таким образом, второй рабочий изготавливает 10 деталей в час.

(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).

3. **Ответ: (1;1;1), (2,3,4), (2,4,3), (3,2,4), (3,4,2), (4,2,3), (4,3,2).**

Решение: В силу симметрии, предположим $x \leq y \leq z$. Разделив обе части равенства на $xyz > 0$, получим: $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 + \frac{2}{xyz}$

тогда $(x, y, z \in \mathbb{N})$ $1 < 1 + \frac{2}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$

Откуда, т.к. $\frac{3}{x} > 1$, то $x = 1$ или $x = 2$.

При $x = 1$ уравнение примет вид $y + yz + z = yz + 2$, $y + z = 2$, откуда $y = z = 1$.

При $x = 2$ получим $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} + \frac{2}{yz}$,

тогда $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{2}{yz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{y}$, откуда $y < 4$

Подставляя в исходное уравнение $y = 2$, $y = 3$ получим решения $y = 3$, $z = 4$.

С учетом симметрии, решениями уравнения являются $(x, y, z) = (1;1;1), (2,3,4), (2,4,3), (3,2,4), (3,4,2), (4,2,3), (4,3,2)$.

4. **Ответ: 90°.** Решение: Точка E — середина дуги AB, поэтому AE = BE как хорды, стягивающие равные дуги. Кроме того, вписанные углы CAE и EBC, опирающиеся на одну дугу, равны. Также по условию AC = BD. Значит, треугольники ACE и BDE равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $\angle CEA = \angle BED$. Но тогда $\angle DEC = \angle CEA + \angle DEA = \angle BED + \angle DEA = \angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$.

Решение 10 класс

1. Ответ: $2020 = 16^2 + 42^2 = 24^2 + 38^2$. Возможны только 2 решения.

Решение: $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101 = 4 \cdot 505 = (2x)^2 + (2y)^2$

$$505 = 101 \cdot 5 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$\begin{cases} c = 2 \\ d = 1 \end{cases} \begin{cases} a = 10 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} c = 1 \\ d = 2 \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = 10 \end{cases}$$

$$505 = (x)^2 + (y)^2 = (2a + b)^2 + (a - 2b)^2 = (a + 2b)^2 + (2a - b)^2$$

$$505 = (x)^2 + (y)^2 = (21)^2 + (8)^2 = (12)^2 + (19)^2$$

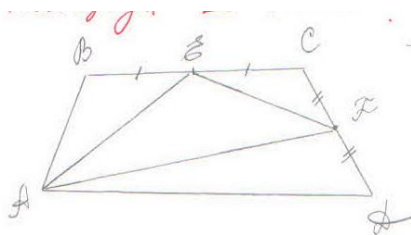
$$2020 = (2x)^2 + (2y)^2 = (42)^2 + (16)^2 = (24)^2 + (38)^2$$

2. Ответ: 20. Решение: Обозначим v_1 и v_2 — объёмы работ, которые выполняют за день первый и второй рабочий, соответственно, полный объём работ примем за 1. Тогда по условию задачи $12(v_1 + v_2) = 1$ и $2v_1 = 3v_2$. Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 12(v_1 + v_2) = 1, \\ 2v_1 = 3v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\left(v_1 + \frac{2}{3}v_1\right) = 1, \\ v_2 = \frac{2}{3}v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{20}, \\ v_2 = \frac{1}{30}. \end{cases}$$

Тем самым, первый рабочий за день выполняет одну двадцатую всей работы, значит, работая отдельно, он справится с ней за 20 дней. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).

3. Ответ: 6.



Решение

$$\begin{aligned} \text{Пусть } S_{\triangle CEF} &= n, \\ S_{\triangle ABE} &= n+1 \\ + S_{\triangle AFD} &= n+2 \\ S_{\triangle AEF} &= n+3 \\ \hline S_{ABCD} &= 4n+6 \end{aligned}$$

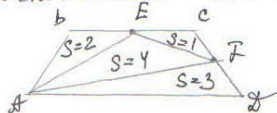
Заметим $S_{\triangle BCF} = 4 S_{\triangle CEF}$,
тогда в общем случае
 $S_{\triangle BCF} \leq 4n$

Получим

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABF} &= S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BCF} \leq \\ &\leq (4n+6) - 4n = 6. \end{aligned}$$

Рав-во достигается, если $\triangle CEF$ имеет наименьшую S из указанных четырех.

* Докажем, что 6 - возможное значение
Пример: $ABCD$ - равностор. трап.
с основаниями 6 и 4, высотой 2



ответ 6.

4. Ответ: 1 и -1.

Условие: $x, y, z \neq 0$

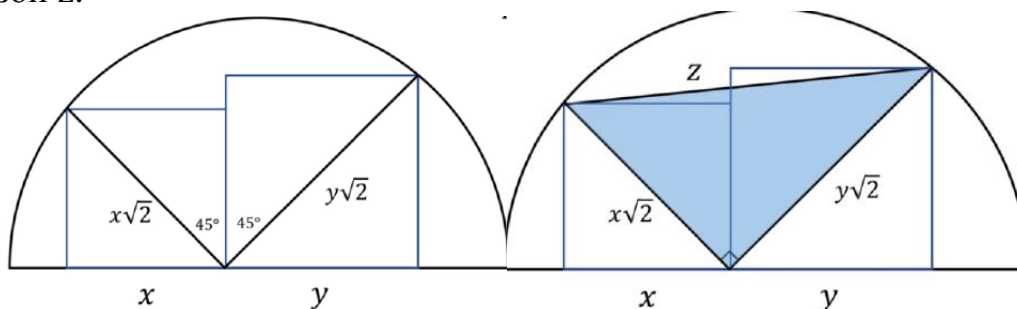
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} \\ x + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{x} \\ y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{y-z}{yz} \\ x - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \\ y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{z-x}{xz} \end{cases}$$

Перемножим рав.вс $(x-y) \cdot (x-z) \cdot (y-z) = \frac{(y-z) \cdot (y-x) \cdot (z-x)}{x^2 y^2 z^2}$

так как $x \neq y, y \neq z, x \neq z$, то $x^2 y^2 z^2 = 1$, т.е. $xyz = 1$ или $xyz = -1$.

5. Ответ: 100. Решение: Обозначим стороны квадратов за x и y . Сумма площадей будет равна $x^2 + y^2$.

Проведем диагонали квадратов. Рассмотрим прямоугольный треугольник с гипотенузой z .



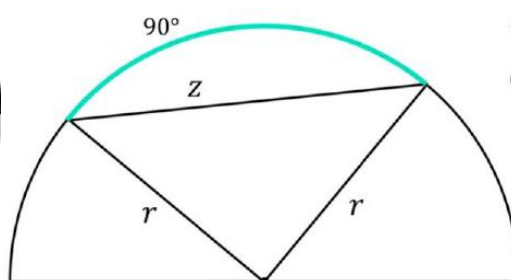
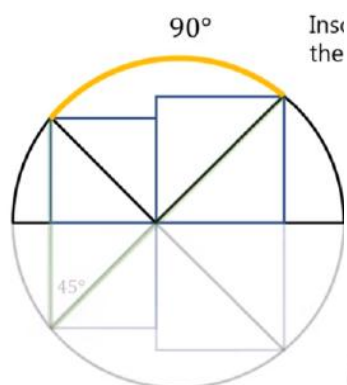
По теореме Пифагора получим равенство $z^2 = 2x^2 + 2y^2$

Дуга окружности, на которую опирается хорда z , равна 90° .

Проведем из центра два радиуса и получим прямоугольный треугольник со сторонами r, r, z .

$$z^2 = r^2 + r^2$$

$$\begin{cases} z^2 = 2x^2 + 2y^2 \\ z^2 = r^2 + r^2 \end{cases} \quad z^2 = 2r^2 = 2x^2 + 2y^2 \quad r^2 = x^2 + y^2 = 100$$



Муниципальный этап XII республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М. Эрдниева в 2019-2020 учебном году
Решение 11 класс

1. Ответ: $2020^2 = 1372^2 + 720^2 + 1296^2 = 1220^2 + 720^2 + 1440^2$.

Решение: Возможны 2 решения. $2020 = a^2 + b^2 + c^2$. Можно считать, что $(a = 36, b = 20, c = 18)$ $a \geq b \geq c$, тогда $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Имеем: $2020 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 = (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2) + 4b^2c^2 + 4a^2c^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2bc)^2 + (2ac)^2$.

Итак, $x = a^2 + b^2 - c^2 = 1296 + 400 - 324 = 1372$, $y = 2bc = 720$, $z = 2ac = 1296$

$2020^2 = 1372^2 + 720^2 + 1296^2$

Если взять $a = 36, b = 18, c = 20$, то получим еще одно решение $2020^2 = 1220^2 + 720^2 + 1440^2$. Других решений нет.

2. Ответ: 6 и 8 часов. Решение: Пусть x и y часов необходимо 1-ой трубе и 2-ой трубе для наполнения бассейна. Объем бассейна обозначим $V = 1$. Составим систему

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 3 \cdot \frac{3}{7} = 1 \\ \frac{1}{3}y \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{y} = \frac{25}{36} \end{cases} \quad \begin{cases} 24(x+y) = 7xy \\ 12(x+y)^2 = 49xy \end{cases} \quad \begin{cases} 24(x+y) = 7xy \\ 12(x+y)^2 = 7 \cdot 24(x+y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=14 \\ xy=48 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$$

(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

3. Ответ: 1320.

Найти площадь параллелограмма

Решение. Найдем $S_{\triangle ABC}$

$$\begin{cases} S_{\triangle} = p \cdot r = (AB + 12) \cdot 5 \\ S_{\triangle} = \frac{1}{2} AB \cdot LN = \frac{1}{2} AB \cdot 11 \end{cases} \Rightarrow AB = 120$$

$$S_{\triangle ABC} = AB \cdot LN = 120 \cdot 11 = 1320$$

Заметим

- $LN = NO + OL = 6 + 5 = 11$ и LN - высота пар. т.к. $OL \perp AB$ и $ON \perp BC$
- $AB = AL + LB$
 $p = AL + LB + CK$ - сумма трех касат.
 $p = \overset{LN}{AB} + CK = AB + 12$
 $CK = \sqrt{CO^2 - OK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

Ответ: 1320

4. Ответ: -39, ..., 40. $x_n = n - 40$

Сложим почленно

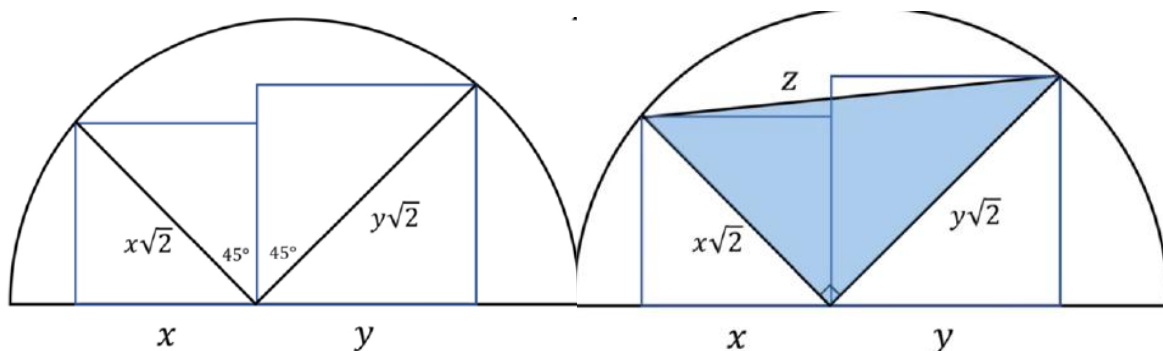
$$80(x_1 + x_2 + \dots + x_{80}) = (1 + 2 + \dots + 80) - (x_1 + x_2 + \dots + x_{80})$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{80} = \frac{1 + 2 + \dots + 80}{81} = \left(\frac{1+80}{2} \cdot 80\right) : 81 = \frac{3240}{81} = 40$$

$\forall n = 1, 2, \dots, 80 \quad 40 = n - x_n, \quad x_n = n - 40$

ответ: $n - 40$, где $n = 1, 2, \dots, 80$

5. Ответ: \mathbf{R}^2 . Решение: Обозначим стороны квадратов за x и y . Сумма площадей будет равна $x^2 + y^2$. Проведем диагонали квадратов. Рассмотрим прямоугольный треугольник с гипотенузой z .



По теореме Пифагора получим равенство $z^2 = 2x^2 + 2y^2$

Дуга окружности, на которую опирается хорда z , равна 90° .

Проведем из центра два радиуса и получим прямоугольный треугольник со сторонами r, r, z .

$z^2 = R^2 + R^2$

$$\begin{cases} z^2 = 2x^2 + 2y^2 \\ z^2 = R^2 + R^2 \end{cases} \quad z^2 = 2R^2 = 2x^2 + 2y^2 \quad R^2 = x^2 + y^2$$

