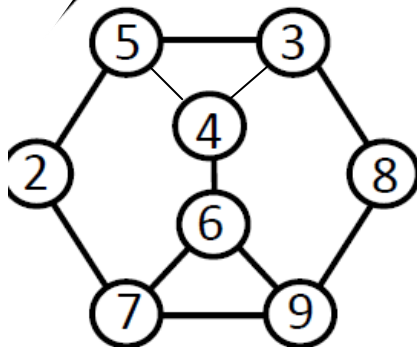


**Школьный этап XIII республиканской математической олимпиады школьников
имени академика РАО П.М. Эрдниева**

Решение 4 класс

1. **Ответ: A=2 B=0 C=1 D=4.** Решение: Перебором получим решение $2014+2+0+1+4=2021$.
2. **Ответ: 90 рублей.** Решение: После первого повышения цен штрюдель стал стоить $80+40 = 120$ рублей; после второго повышения цен – $120+60 = 180$ рублей; наконец, после снижения цены он стал стоить $180 : 2 = 90$ рублей. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется.**).
3. **Ответ: 60 рублей.** Решение: **1 способ.** $42 - 40 = 2$ рубля, $42 - 38 = 4$ рубля. Значит, вторая книга дороже первой на 2 рубля, третья дороже первой на 4 рубля.
Пусть x рублей – стоит 1 книга,
Тогда $(x + 2) + (x+4) = 42$
 $2x = 42 - 6$
 $2x = 36$
 $x = 18$
1 книга – 18 р., 2 книга – 20 р., 3 книга - 22 р. Вся покупка $18+20+22=60$.
2 способ. Обозначим стоимость книг x, y, z . Тогда $y+z=42, x + z=40, x+y=38$.
Сложим $2x+2y=2z=120$ $x+y+z=60$
4. **Ответ: возможны различные варианты. Приведен 1 пример – 7 баллов.**

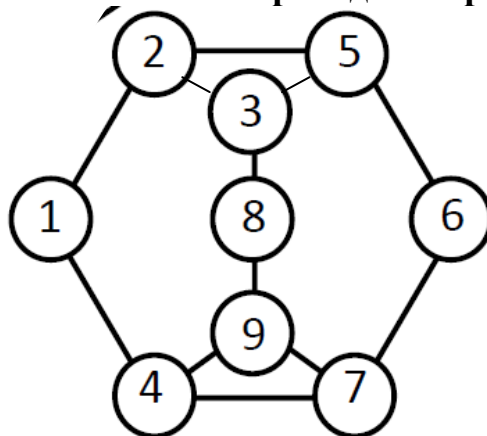


5. **Ответ: 6 см².** Четырехугольник состоит из 2 целых клеток и 8 половинок. Значит его площадь равна $2+4=6$ см².

**Школьный этап XIII республиканской математической олимпиады школьников
имени академика РАО П.М. Эрдниева**

Решение 5 класс

1. **Ответ: 2014.** Решение: Перебором получим решение $2014+2+0+1+4=2021$.
2. **Ответ: 90 рублей.** Решение: После первого повышения цен штрюдель стал стоить $80+40 = 120$ рублей; после второго повышения цен – $120+60 = 180$ рублей; наконец, после снижения цены он стал стоить $180 : 2 = 90$ рублей. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).
3. **Ответ: 52 рубля.** Решение: $42 - 40 = 2$ рубля, $42 - 36 = 4$ рубля, $42 - 36 = 6$ рублей
Значит, вторая книга дороже первой на 2 рубля, третья дороже первой на 4 рубля, четвертая дороже первой на 6 рублей.
Пусть x рублей – стоит 1 книга,
Тогда $(x + 2) + (x+4) + (x+6) = 42$
 $3x = 42 - 12$
 $3x = 30$
 $x = 10$
1 книга – 10 р., 2 книга – 12 р., 3 книга - 14 р., 4 книга – 16 р. Вся покупка 52 рубля.
4. **Ответ: возможны различные варианты. Приведен 1 пример – 7 баллов.**



5. **Ответ: 6 кв.ед.** Решение. $B=3$, $\Gamma=8$, $S=3+4-1=6$.
Проверка. Четырехугольник состоит из 2 целых клеток и 8 половинок. Значит, его площадь равна $2+4=6$. (При оценивании необходимо учитывать наличие проверки: верное решение задачи 4 балла, проверка -3 балла).

**Школьный этап XIII республиканской математической олимпиады школьников
имени академика РАО П.М. Эрдниева**

Решение 6 класс

- 1. Ответ: 303369.** Решение: Если первая буква была a , а вторая — b , то третья будет $(a + b)$, четвёртая — $(a + 2b)$, пятая — $(2a + 3b)$, шестая — $(3a + 5b)$. Нам надо подобрать максимальное возможное значение a , чтобы при этом шестая цифра оставалась "цифрой", т.е. чтобы выполнялось неравенство $3a + 5b < 10$. Это возможно при $a = 3$, $b = 0$, т.е. искомое число будет 303369.
- 2. Ответ: на 50%.** Решение. Пусть Батр собрал x грибов. Тогда Саран собрал $0,8x$, а Пюрвя - $1,2x$ грибов. Таким образом, Пюрвя собрал грибов в $1,2 : 0,8 = 1,5$ раза больше, чем Саран, то есть на 50%. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).
- 3. Ответ: $a = -4$, $b = 2$, $c = -2$.** Решение: Итак, $a + b = c$, $bc = a$. Значит, $bc + b = c$. Преобразуем это выражение в $b(c + 1) = c$. Левая часть делится на $c + 1$, значит, и правая часть делится. То есть, c кратно $c + 1$. При этом, если число $c + 1$ делится на m , то c даёт при делении на m остаток $m - 1$. Значит, либо $c + 1 = 1$ (но тогда $c = 0$ и $b = 0$), либо $c + 1 = -1$, тогда $c = -2$, а отсюда $b = 2$, $a = -4$.
- 4. Ответ: 10.** Решение: Перебором находим ответ $\ast = 10$.
- 5. Ответ: 17 кв.ед.** Решение: $B=14$, $\Gamma=8$, $S=14+4-1=17$.
Проверка. Достроим многоугольник до прямоугольника. Его площадь равна разности площади прямоугольника и образовавшихся треугольников и прямоугольников $S=30-1,5-2-1-3-0,5-2-3=17$. (При оценивании необходимо учитывать наличие проверки: верное решение задачи 4 балла, проверка – 3 балла).

**Школьный этап XIII республиканской математической олимпиады школьников
имени академика РАО П.М. Эрдниева**

Решение 7 класс

1. **Ответ: 432. Решение:** Запишем уравнение $10(10x+y)+4 = 0,75 \cdot (400+10x+y)$, отсюда $10x+y = 32$.
2. **Ответ: отливали по 10 л. Решение.** При каждом действии количество спирта уменьшается в одно и то же число раз, а за два действия оно уменьшилось в 4 раза до 5 л. Значит, за одно действие (например, первое) оно уменьшилось вдвое, поэтому отливали 10 л. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).
3. **Ответ: 98. Решение.** 1 способ. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = (a-b)((a-b)^2 + 3ab) = 2 \cdot (2^2 + 3 \cdot 15) = 98$.
2 способ. $a-b=2$ $ab=15$ возведём в куб первое уравнение $(a-b)^3=8$
 $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 8$
 $a^3 - b^3 = 8 + 3a^2b - 3ab^2$
 $a^3 - b^3 = 8 + 3ab(a-b) = 8 + 3 \cdot 15 \cdot 2 = 98$
4. **Ответ: на рисунке.** Существуют и другие решения. Любая подходящая под условия расстановка без объяснения и проверки – 7 баллов.

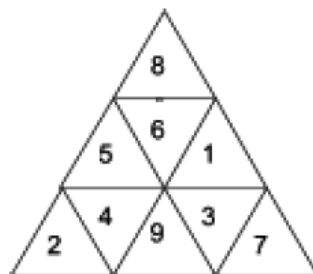
| | | |
|---|---|---|
| 9 | 1 | 6 |
| 2 | 8 | 5 |
| 7 | 3 | 4 |

5. **Ответ: 20 кв.ед. Решение:**
1 способ. 1) $B=24$, $\Gamma=4$, $S_1 = 24+2-1=25$ 2) $B=4$, $\Gamma=4$, $S_2 = 4+2-1=5$ 3) $S=S_1 - S_2 = 20$ (4 балла)
2 способ. Достроим большой четырехугольник до квадрата. Его площадь равна разности площади квадрата и образовавшихся 4 треугольников $S_1 = 49 - 4 \cdot 6 = 25$.
Достроим выколотый четырехугольник до квадрата. Его площадь равна разности площади квадрата и образовавшихся 4 треугольников $S_2 = 9 - 4 \cdot 1 = 5$. Тогда $S=S_1 - S_2 = 20$ (3 балла)

**Школьный этап XIII республиканской математической олимпиады
школьников имени академика РАО П.М. Эрдниева**

Решение 8 класс

- 1. Ответ: 1) 26,...,68 2) 20,...,66.** Решение. Пусть x -первое натуральное число последовательности $x+(x+1)+\dots+(x+n)=2021$. $x(n+1)+n(n+1)/2=2021$. Получим уравнение и разложим на множители правую часть $(n+1)(2x+n)=2\cdot 2021=2\cdot 43\cdot 47=86\cdot 47=94\cdot 43$, отсюда следует, что x – двузначное, число. Тогда $n+1=47$ и $n=46$. Таким образом, этих чисел 47. Подставим и решим уравнение $2x+46=86$, откуда получим $x=20$. Таким образом, 20,...,66. Аналогично при $n+1=43$ $n=42$. Таким образом, этих чисел 43. Подставим и решим уравнение $2x+42=94$, откуда получим $x=26$ и 26,...68.
- 2. Ответ: 2:1.** Решение: Пусть первый раствор взят в количестве x грамм, тогда он содержит $0,2x$ грамм чистой кислоты, а второй раствор взят в количестве y грамм, тогда он содержит $0,5y$ грамм чистой кислоты. При смешивании двух этих растворов получится раствор массой $x + y$ грамм, по условию задачи, он содержит $0,3(x + y)$ чистой кислоты. Следовательно, можно составить уравнение: $0,2x+0,5y=0,3(x+y)$ и тогда $x=2y$, а значит $x:y=2:1$. Следовательно, отношение, в котором были взяты растворы: 2:1. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).
- 3. Ответ: остаток 1, минимальное число 25.** Решение. Обозначим делимое число за n , тогда $n=12k + a$, где k и a -частное и остаток, полученные Батром, и $n = 13m + b$, где m и b - частное и остаток, полученные Очиром. По условию $k + b = 14$, откуда $12k + a = n = 13m + 14 - k$, следовательно $13(k - 1) = 14 - a$ - делится на 13. Ввиду того, что $0 \leq a \leq 11$, получаем единственно возможный ответ $a = 1$. Минимальным примером такого n является число $25=12\cdot 2+1=13\cdot 1+12$, сумма неполного частного, полученного Батром и остатка, полученного Очиром, при этом действительно равна 14. Все возможные остальные примеры: 37, 49, 61,..., 169.
- 4. Ответ: на рисунке.** Существуют и другие решения. Любая подходящая под условия расстановка без объяснения и проверки – 7 баллов.



- 5. Ответ: 70° .** Решение: **1 способ.** Построим равносторонний треугольник BCD так, чтобы вершина A оказалась внутри треугольника BCD . Проведем отрезок AD . Так как треугольник ABC равнобедренный, то его углы при основании равны 50°

градусов. $\angle DBA = \angle DCA = 10^\circ$. Тогда треугольники DAB и DAC по 1 признаку равенству треугольника (AD- общая, DB=DC, $\angle DBA = \angle DCA$) и $\angle BDA = 30^\circ$.

Треугольники DAB и BMC равны по 2 признаку равенству треугольника (DB=DC, $\angle BDA = \angle MBC$ $\angle DBA = \angle MCB$). Тогда MC=AC и треугольник AMC равнобедренный и $\angle AMC = 70^\circ$.

2 способ. Опустим высоту АК. Продолжим BM до пересечения с АК в точке Е. Ак и CM пересекаются в точке D.

Соединим точку С и Е. $\angle A = \angle C = 50^\circ$

Треугольник ВЕС равнобедренный, тогда $\angle BEC = \angle AEC = 120^\circ$, $\angle CEK = 60^\circ$ $\angle EMC = \angle CAE = 40^\circ$

$\triangle AEC = \triangle MEC$ по 2 признаку равенства треугольников. $AC = MC$ тогда треугольник MAC –равнобедренный. Тогда $\angle AMC = (180 - 40) : 2 = 70^\circ$

Решение 9 класс

1. **Ответ: 1) 26,...,68 2) 20,...,66.** Решение. Пусть x -первое натуральное число последовательности $x+(x+1)+\dots+(x+n)=2021$. $x(n+1)+n(n+1)/2=2021$. Получим уравнение и разложим на множители правую часть $(n+1)(2x+n)=2\cdot 2021=2\cdot 43\cdot 47=86\cdot 47=94\cdot 43$, отсюда следует, что x – двузначное, число. Тогда $n+1=47$ и $n=46$. Таким образом, этих чисел 47. Подставим и решим уравнение $2x+46=86$, откуда получим $x=20$. Таким образом, 20,...,66. Аналогично при $n+1=43$ $n=42$. Таким образом, этих чисел 43. Подставим и решим уравнение $2x+42=94$, откуда получим $x=26$ и 26,...68.

2. **Ответ: 12 кг.** Решение: Пусть x кг масса меди в сплаве, тогда после добавления 6 кг меди содержание меди увеличилось на 10%. Следовательно, можно составить уравнение: $\frac{x+6}{36} - \frac{x}{30} = \frac{1}{10}$ и тогда $x=12$. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).

3. **Ответ: 0.** Решение: $(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1$

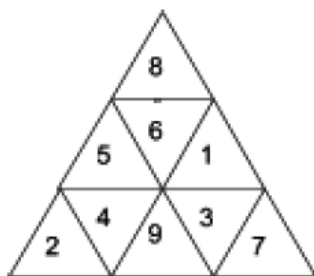
Введем обозначение $u = x + \sqrt{1+x^2}$ и подставим в уравнение $u(y + \sqrt{1+y^2}) = 1$

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{1}{u} - y \quad (\sqrt{1+y^2})^2 = \left(\frac{1}{u} - y\right)^2 \quad 1 = \frac{1}{u^2} - \frac{2y}{u}$$

$$2y = \frac{1}{u} - u \quad u = x + \sqrt{1+x^2} \quad \frac{1}{u} = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{-1} = -x + \sqrt{1+x^2} \quad 2y = \frac{1}{u} - u = -2x$$

$$y = -x \quad (x+y)^2 = (x-x)^2 = 0$$

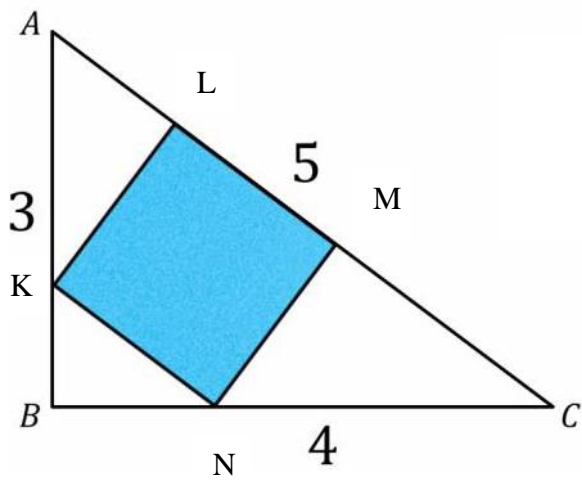
4. **Ответ: на рисунке.** Существуют и другие решения. Любая подходящая под условия расстановка без объяснения и проверки – 7 баллов.



5. **Ответ: 3 кв.ед.** Решение. Обозначим стороны прямоугольника $KL=x$, $KN=y$. Из подобия прямоугольных треугольников ALK , CMN , KBN , ABC получим

$$AL = \frac{3}{4}x, MC = \frac{4}{3}x, \frac{3}{4}x + y + \frac{4}{3}x = 5, y = 5 - \frac{25}{12}x$$

$$S = xy = 5x - \frac{25}{12}x^2 = -\frac{25}{12}\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + 3 \leq 3$$



**Школьный этап XIII республиканской математической олимпиады школьников
имени академика РАО П.М.Эрдниева
Решение 10 класс**

- 1. Ответ: 1) 26,...,68 2) 20,...,66.** Решение. Пусть x -первое натуральное число последовательности $x+(x+1)+\dots+(x+n)=2021$. $x(n+1)+n(n+1)/2=2021$. Получим уравнение и разложим на множители правую часть $(n+1)(2x+n)=2\cdot 2021=2\cdot 43\cdot 47=86\cdot 47=94\cdot 43$, отсюда следует, что x – двузначное, число. Тогда $n+1=47$ и $n=46$. Таким образом, этих чисел 47. Подставим и решим уравнение $2x+46=86$, откуда получим $x=20$. Таким образом, 20,...,66. Аналогично при $n+1=43$ $n=42$. Таким образом, этих чисел 43. Подставим и решим уравнение $2x+42=94$, откуда получим $x=26$ и 26,...,68.

- 2. Ответ: 4 л, 0,5 л глицерина.**

Решение: Обозначим за x объем сосуда, тогда после первой операции глицерин займет $\frac{x-2}{x}$

часть сосуда. Отлив 2 л смеси, получим $\frac{x-2}{x}(x-2)$ л глицерина в сосуде, а после доливания

2 л воды, глицерин займет $\left(\frac{x-2}{x}\right)^2$ часть сосуда. Аналогично после следующей замены 2 л

смеси на 2 л воды, глицерин займет $\left(\frac{x-2}{x}\right)^3$ часть сосуда. Тогда количество глицерина в

сосуде после всех операций равно $x\left(\frac{x-2}{x}\right)^3$, а количество воды $x\left(\frac{x-2}{x}\right)^3+3$. В сумме же они дают первоначальный объем сосуда. Таким образом, получаем кубическое уравнение:

$$2x\left(\frac{x-2}{x}\right)^3+3=x. \quad (1)$$

$$x^3-9x^2+24x-16=0,$$

$$(x-1)(x-4)^2=0,$$

$$x_1=1, x_2=4.$$

Первый корень не подходит по смыслу задачи, следовательно $x=4$, количество глицерина

$$x\left(\frac{x-2}{x}\right)^3=0,5 \text{ л, количество воды } 3,5 \text{ л.}$$

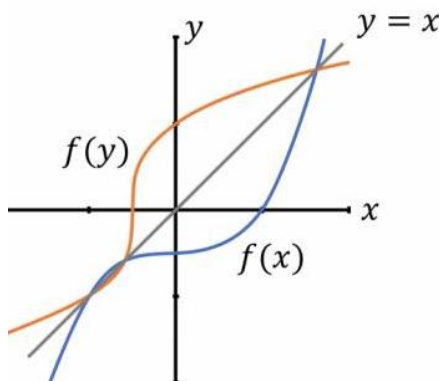
(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).

- 3. Ответ: $x=-1, x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$** Решение. Введем переменную $y=\sqrt[3]{2x+1}$ и

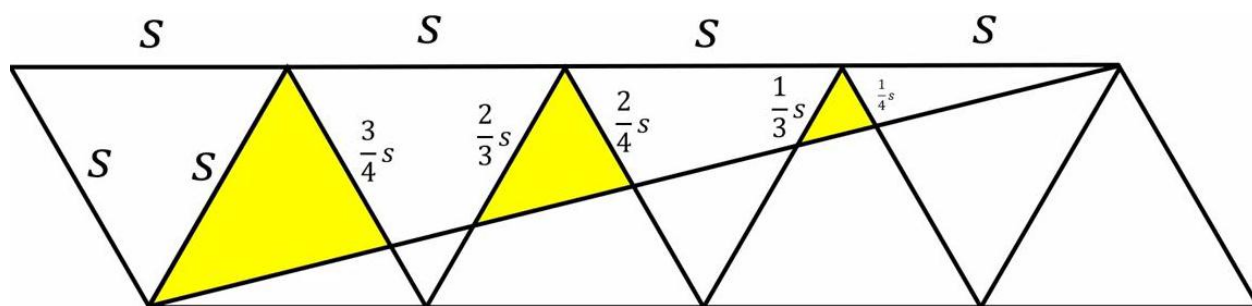
$$\text{подставим в уравнение } 2y=x^3-1 \quad y=\frac{x^3-1}{2}$$

$$\text{из } y=\sqrt[3]{2x+1} \text{ выразим } x=\frac{y^3-1}{2}$$

симметричны относительно прямой $y = x$.


$$x = \frac{x^3 - 1}{2} \quad x^3 - 2x - 1 = 0 \quad (x + 1)(x^2 - x - 1) = 0 \quad x = -1 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

- $\frac{S^2 \sqrt{3}}{4} = 6$ $S^2 = 8\sqrt{3}$ Достроим до параллелограмма. По теореме Фалеса найдем отрезки 3 закрашенных треугольников. Найдем сумму площадей полученных треугольников



$$\frac{1}{2}S^2\frac{3}{4}\sin 60^\circ + \frac{1}{2}S^2\frac{1}{3}\sin 60^\circ + \frac{1}{2}S^2\frac{1}{12}\sin 60^\circ = x + y + z.$$

$$\frac{1}{2} S^2 \frac{3}{4} \sin 60^\circ + \frac{1}{2} S^2 \frac{1}{3} \sin 60^\circ + \frac{1}{2} S^2 \frac{1}{12} \sin 60^\circ = 4,5 + 2 + 0,5 = 7$$

Решение 11 класс

- 1. Ответ: 145.** Решение. $a!+b!+c!=\overline{abc}=x$. Заметим, что $7!>1000$. Тогда 7, 8 и 9 не могут быть цифрами этого числа и $x<700$. $6!=720$ тоже отбрасываем и $x\leq 555$, но $5!+5!+5!=360$ и $x<360$
 $3!+5!+5!=246$ $2!+4!+5!=146$ $1!+4!+5!=145$.

- 2. Ответ: 240000 рублей.** Решение:

Пусть Батр ежегодно вносил на счет x тыс. руб.

К концу первого года хранения размер вклада стал $3600 \cdot 1,1 = 3960$ тыс. руб.

Батр дополнительно внес x р. Размер вклада стал $3960 + x$ тыс. руб.

К концу второго года хранения размер вклада стал $(3960 + x) \cdot 1,1 = 4356 + 1,1x$ тыс. руб.

Батр вновь сделал дополнительный взнос x тыс. руб.

Размер вклада стал $4356 + 1,1x + x = 4356 + 2,1x$ тыс. руб.

К концу года были начислены проценты на сумму $4356 + 2,1x$ тыс. руб.

Размер вклада стал $(4356 + 2,1x) \cdot 1,1 = 4791,6 + 2,31x$ тыс. руб., который равен $3600 \cdot 1,485 = 5346$ тыс.руб.

Таким образом, составим и решим уравнение: $4791,6 + 2,31x = 5346 \Leftrightarrow 2,31x = 554,4 \Leftrightarrow x = 240$.

(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла, **без решения прямой задачи, обратная задача не проверяется**).

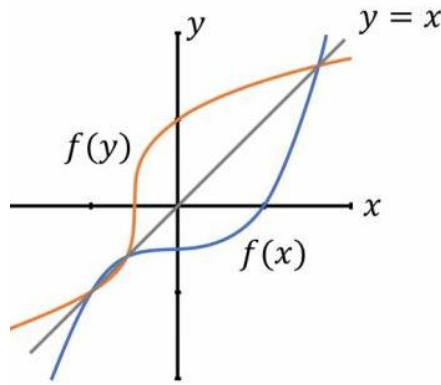
- 3. Ответ:** $x = -1, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ Решение. Введем переменную $y = \sqrt[3]{2x+1}$ и

подставим в уравнение $2y = x^3 - 1$ $y = \frac{x^3 - 1}{2}$

из $y = \sqrt[3]{2x+1}$ выразим $x = \frac{y^3 - 1}{2}$

$$\begin{cases} x = \frac{y^3 - 1}{2} = f(y) \\ y = \frac{x^3 - 1}{2} = f(x) \end{cases}, \text{ где } f \text{ монотонная возрастающая функция и графики}$$

симметричны относительно прямой $y = x$. Функции $f(x)$ и $f(y)$ взаимно-обратные.

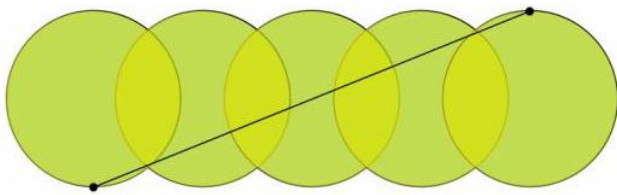


Тогда решение системы будет в точках при $y = x$

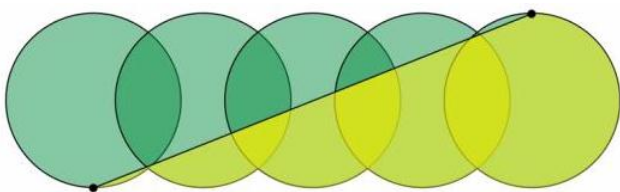
$$x = \frac{x^3 - 1}{2} \quad x^3 - 2x - 1 = 0 \quad (x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \quad x = -1 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

4. **Доказательство:** Поделим круг на 1010 равных секторов, тогда площадь каждого сектора равна $1/1010$. Хотя бы в один из этих секторов попадет 3 точки, точка принадлежащая границе секторов считается принадлежащей одному из них по принципу Дирихле. Значит существует треугольник, вершинами которого являются эти точки и его площадь меньше площади сектора. Так как площадь сектора $1/1010 < 0,001 = 1/1000$, значит и площадь треугольника меньше 0,001.

5. **Ответ: 20.** Решение:



$$\text{Diagram of 5 small overlapping circles} = 2 \times 40$$



$$\text{Diagram of 5 small overlapping circles} = 80 = 5 \text{ (large circle)} - 4 \text{ (small segment)} \quad 20 = \text{ (large circle)}$$